Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a

Galaţi, 26 octombrie, 2013

Clasa a X-a

SOLUŢII

Problema 1.

În identitatea $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$

înlocuim $a=\ln x, b=[\ln x], c=\{\ln x\}$ şi obţinem:

$0=7\cdot\ln^3 x-[\ln x]^3-\{\ln x\}^3=3\cdot(\ln x+[\ln x])\cdot([\ln x]+\{\ln x\})\cdot(\{\ln x\}+\ln x)$ sau

$(2\cdot[\ln x]+\{\ln x\})\cdot\ln x\cdot([\ln x]+2\cdot\{\ln x\})=0$. Sunt posibile cazurile:

1. $\ln x=0\Leftrightarrow x=1\notin M$
2. $\{\ln x\}=-2\cdot[\ln x]\Rightarrow\begin{cases}\{\ln x\}=0\\ [\ln x]=0\end{cases}\Rightarrow\ln x=0\Rightarrow x=1\notin M$
3. $2\cdot\{\ln x\}=-[\ln x]$.Egalitatea este posibilă dacă $2\cdot\{\ln x\}\in[0,2)\cap\mathbb{Z}$,ceea ce revine la $\{\ln x\}=[\ln x]=0\Rightarrow x=1\notin M$ sau $2\cdot\{x\}=1=-[\ln x]$.Ultima condiţie conduce la rezolvarea sistemului $\begin{cases}\{\ln x\}=\frac{1}{2}\\ [\ln x]=-1\end{cases}\Rightarrow\ln x=-\frac{1}{2}$ şi $x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\Rightarrow M=\left\{\frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$.

Calculăm suma şi folosind o consecinţă a inegalităţii mediilor rezultă

$$\sum_{k=2}^{2013}\log_k x=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2013}\log_k e=-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2013}\frac{1}{\ln k}<-\frac{2012^2}{2\cdot\sum_{k=2}^{2013}\ln k}=\frac{2012^2}{\ln\frac{1}{(2013!)^2}}\ .$$

Altfel: $7\cdot(u+v)^3-\left(u^3+v^3\right)=0$, unde $u=[\ln x]$, $v=\{\ln x\}$,etc.

Problema2.

Înlocuim în relaţia funcţională n prin $f(n+1)+2$ şi obţinem $f\left(f\left(f(n+1)+3\right)+3\right)=f(n+1)+2$.

Folosim relaţia iniţială şi trebuie determinată funcţia f, dată prin condiţia

$f(n+3)=f(n+1)+2,\forall n\in\mathbb{Z}$ sau $f(n+2)=f(n)+2,\forall n\in\mathbb{Z}$.

Demonstrăm prin inducţie că $\begin{cases}f(2\cdot n)=2\cdot n+f(0)\\ f(2\cdot n+1)=2\cdot n+f(1)\end{cases},\forall n\in\mathbb{Z}$.

Arătăm că $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.Este evident că $f(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ şi dacă $m\in\mathbb{Z}$ atunci există $n=f(m+1)+3\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(n)=f\left(f(m+1)+3\right)=m$,deci $\mathbb{Z}\subset f(\mathbb{Z})$.Din $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ rezultă că $f(0)$ şi $f(1)$ au parităţi diferite.Dacă $f(0)$ este impar şi $f(1)$ par atunci din $f\left(f(2\cdot n+1)+3\right)=2\cdot n$ rezultă că $f\left(2\cdot n+f(1)+3\right)=2\cdot n\Rightarrow 2\cdot n+f(1)+3-1+f(1)=2\cdot n\Rightarrow f(1)=1$.Dacă $f(0)$ este par şi

$f(1)$ impar atunci $f\left(f\left(2\cdot n+1\right)+3\right)=2\cdot n\Rightarrow f\left(2\cdot n+f\left(1\right)+3\right)=2\cdot n\Rightarrow$

$2\cdot n+f\left(1\right)+3+f\left(0\right)=2\cdot n\Rightarrow f\left(1\right)=-3-f\left(0\right)$.Forma găsită pentru funcția f este

$f\left(n\right)=\begin{cases}n+c\,, & n\ par\\ n-4-c\,, & n\ impar\end{cases}$,unde $c=f\left(0\right)$ este număr par.

Se arată că funcțiile determinate verifică relația funcțională dată.

Problema3.

Presupunem prin reducere la absurd că mulțimea A este finită şi fie $N=\max A$.

Dacă $n\in\mathbb{N},n>N\Rightarrow n\notin A$,adică, $\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\le\left|\cos a_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin a_{n-1}\right|,\forall n>N$.

Dar $\left|\cos a_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin a_{n-1}\right|\le\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\cos^2 a_{n-1}+\sin^2 a_{n-1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$.prin tranzitivitate obținem că

$\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\le\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}},\forall n>N\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{a_{n-1}}{\sqrt{n}}-\frac{a_n}{\sqrt{n+1}},\forall n>N$.Sumând ultima relație pentru n luând valori de la $N+1$ la m obținem:

$$\sum_{n=N+1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{a_N}{\sqrt{N+1}}-\frac{a_m}{\sqrt{m+1}}<\frac{a_N}{\sqrt{N+1}}.$$

Dacă,eventual,adunăm în ambii membri ai inegalității constanta $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}$ şi notăm

$M=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{a_N}{\sqrt{N+1}}$ rezultă că $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}<M$

Dar $\frac{1}{\sqrt{k}}>2\cdot\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ şi prin adunare rezultă că $2\cdot\left(\sqrt{m+2}-1\right)<\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}<M,\forall m\in\mathbb{N}^*$

sau $m<\left(\frac{M}{2}+1\right)^2-2,\forall m\in\mathbb{N}^*$, fals,pentru că $\mathbb{N}$ nu este finită.Urmează că mulțimea A este infinită.